



**CIENCIA Y TECNOLOGÍA**

**Profesor:**  
**ESTEBAN LÓPEZ FIGUEROA**

**Alumna:**  
**MARINA TRONCOSO**

**Curso 2012-2013**

**Título:**  
**ESTUDIO SOBRE EL NÚMERO ÁUREO**

# ESTUDIO SOBRE EL NÚMERO ÁUREO

## INTRODUCCIÓN

El número áureo o de oro (también llamado razón extrema y media, razón áurea, razón dorada, media áurea, proporción áurea y divina proporción) representado por la letra griega  $\phi$  (phi) (en minúscula) o  $\Phi$  (phi) (en mayúscula), en honor al escultor griego Fidias, es un número irracional.

Este honor se le concedió a Fidias por el máximo valor estético atribuido a sus esculturas, propiedad que ya por entonces se le atribuía también al número áureo.

También se representa con la letra griega Tau ( $T \tau$ ), por ser la primera letra de la raíz griega τομή, que significa acortar, aunque encontrarlo representado con la letra Fi ( $\Phi, \phi$ ) es más común.

Se trata de un número algebraico irracional (decimal infinito no periódico) que posee muchas propiedades interesantes y que fue descubierto en la antigüedad, no como “unidad” sino como relación o proporción entre segmentos de rectas.

Esta proporción se encuentra tanto en algunas figuras geométricas como en la naturaleza. Puede hallarse en elementos geométricos, en las nervaduras de las hojas de algunos árboles, en el grosor de las ramas, en el caparazón de un caracol, en los flósculos de los girasoles, etc.

Asimismo, se atribuye un carácter estético a los objetos cuyas medidas guardan la proporción áurea. Algunos incluso creen que posee una importancia mística. A lo largo de la historia, se ha atribuido su inclusión en el diseño de diversas obras de arquitectura y otras artes, aunque algunos de estos casos han sido cuestionados por los estudiosos de las matemáticas y el arte.

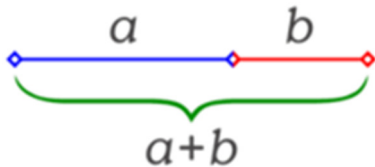
El número áureo puede encontrarse por todas partes, y a menudo ni siquiera somos conscientes de que está allí.

En general, cuando algo nos resulta atractivo, esconde entre sus partes esta relación.

## Valor del número áureo

El número áureo surge de la división en dos de un segmento guardando las siguientes proporciones:

La longitud total  $a+b$  es al segmento más largo  $a$  como  $a$  es al segmento más corto  $b$ .



El número áureo es el valor numérico de la proporción que guardan entre sí dos segmentos de recta  $a$  y  $b$  que cumplen la siguiente relación:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

**El cociente  $\frac{a}{b}$  es el valor del número áureo:  $\phi$ .**

Surge al plantear el problema geométrico siguiente: partir un segmento en otros dos, de forma que, al dividir la longitud total entre el mayor, obtengamos el mismo resultado que al dividir la longitud del mayor entre la del menor.

Si al número menor ( **$b$** ) le asignamos el valor 1, la igualdad será:

$$\frac{a+1}{a} = a$$

Multiplicando ambos miembros por  **$a$** , obtenemos:

$$a+1 = a^2$$

Igualamos a cero:

$$a^2 - a - 1 = 0$$

La solución positiva de la ecuación de segundo grado es:

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887 \dots$$

**Este es el valor del número áureo, equivalente a la relación  $\frac{a}{b}$ .**

## El número áureo a través de los tiempos

Algunos autores sugieren que el número áureo se encuentra como proporción en varias estelas de Babilonia y Asiria de alrededor de 2000 a. C. Sin embargo, no existe documentación histórica que indique que el número áureo fuera utilizado conscientemente por dichos artistas en la elaboración de las estelas.

El primero en hacer un estudio formal del número áureo fue Euclides (c. 300-265 a. C.), quién lo definió de la siguiente manera:

**"Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el segmento mayor es al segmento menor".**

Euclides demostró también que este número no puede ser descrito como la razón de dos números enteros, es decir, es un número irracional.

## Relación con los sólidos platónicos

Platón (c. 428-347 a. C.) vivió antes de que Euclides estudiara el número áureo, sin embargo, a veces se le atribuye el desarrollo de teoremas relacionados con el número áureo.

El número áureo está relacionado con los sólidos platónicos, en particular con el icosaedro y el dodecaedro, cuyas dimensiones están dadas en términos del número áureo.

Platón consideró que los números irracionales, descubiertos por los pitagóricos, eran de particular importancia y la llave de la física del cosmos. Esta opinión tuvo una gran influencia en muchos filósofos y matemáticos posteriores, en particular los neoplatónicos.

A pesar de lo discutible de su conocimiento sobre el número áureo, Platón se ocupó de estudiar el origen y la estructura del cosmos, cosa que intentó usando los cinco sólidos platónicos. Para Platón, cada uno de los sólidos correspondía a una de las partículas que conformaban cada uno de los elementos: la tierra estaba asociada al cubo, el fuego al tetraedro, el aire al octaedro, el agua al icosaedro, y finalmente el Universo como un todo, estaba asociado con el dodecaedro.

En 1509 el matemático y teólogo Luca Pacioli publica su libro *De Divina Proportione* (La Divina Proporción), en el que plantea cinco razones por las que estima apropiado considerar divino al número áureo:

1. La unicidad; Pacioli compara el valor único del número áureo con la unicidad de Dios.
2. El hecho de que esté definido por tres segmentos de recta, Pacioli lo asocia con la Trinidad (sic).
3. La inconmensurabilidad; para Pacioli la inconmensurabilidad del número áureo y la inconmensurabilidad de Dios son equivalentes.
4. La Autosimilaridad asociada al número áureo; Pacioli la compara con la omnipresencia e invariabilidad de Dios.
5. Según Pacioli, de la misma manera en que Dios dio ser al Universo a través de la quinta esencia, representada por el dodecaedro; el número áureo dio ser al dodecaedro.

En 1525, Alberto Durero publica *Instrucción sobre la medida con regla y compás* de figuras planas y sólidas donde describe cómo trazar con regla y compás la espiral áurea basada en la sección áurea, que se conoce como “espiral de Durero”.

El astrónomo Johannes Kepler (1571-1630), desarrolló un modelo Platónico del Sistema Solar utilizando los sólidos platónicos, y se refirió al número áureo en términos grandiosos:

“La geometría tiene dos grandes tesoros: uno es el teorema de Pitágoras; el otro, la división de una línea entre el extremo y su proporcional. El primero lo podemos comparar a una medida de oro; el segundo lo debemos denominar una joya preciosa”

El primer uso conocido del adjetivo áureo, dorado, o de oro, para referirse a este número lo hace el matemático alemán Martin Ohm, hermano del célebre físico Georg Simon Ohm, en la segunda edición de 1835 de su libro *Die Reine Elementar Mathematik* (Las Matemáticas Puras Elementales). Ohm escribe en una nota al pie:

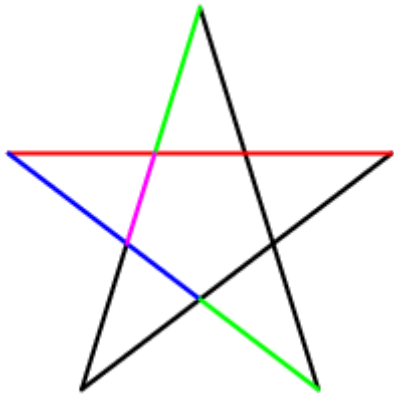
"Uno también acostumbra llamar a esta división de una línea arbitraria en dos partes como éstas, la sección dorada."

### El número áureo en la geometría:

El número áureo y la sección áurea están presentes en todos los objetos geométricos regulares o semi-regulares en los que haya simetría pentagonal, que sean pentágonos o que aparezca de alguna manera la raíz cuadrada de cinco.

- Relaciones entre las partes del pentágono.
- Relaciones entre las partes del pentágono estrellado, o pentagrama.
- Relaciones entre las partes del decágono.
- Relaciones entre las partes del dodecaedro y del icosaedro.

### En el pentagrama



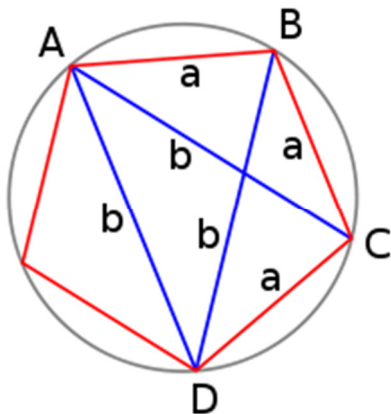
Los segmentos coloreados del pentagrama poseen proporciones áureas.

El número áureo tiene un papel muy importante en los pentágonos regulares y en los pentagramas. Cada intersección de partes de un segmento intersecta a otro segmento en una razón áurea. El pentagrama incluye diez triángulos isósceles: cinco acutángulos y cinco obtusángulos. En ambos, la razón de lado mayor y el menor es  $\phi$ . Estos triángulos se conocen como los triángulos áureos.

### El teorema de Ptolomeo y el pentágono

Claudio Ptolomeo desarrolló un teorema conocido como el teorema de Ptolomeo, el cual permite trazar un pentágono regular mediante regla y compás. Aplicando este teorema, se forma un cuadrilátero al quitar uno de los vértices del pentágono. Si las diagonales y la base mayor miden **b**, y los lados y la base menor miden **a**, resulta que  $b^2 = a^2 + ab$  lo que implica:

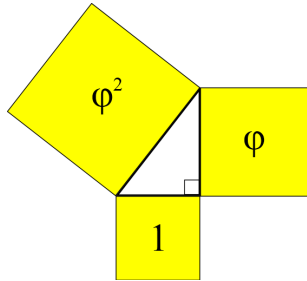
$$\frac{b}{a} = \frac{(1 + \sqrt{5})}{2}.$$



Se puede calcular el número áureo usando el teorema de Ptolomeo en un pentágono regular.

## El triángulo de Kepler:

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$



## Representación mediante raíces anidadas

$$\varphi = \sqrt{1 + \varphi} \quad \rightarrow \quad \varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

## El número áureo en la Naturaleza

En la naturaleza, hay muchos elementos relacionados con la sección áurea y/o los números de Fibonacci (Leonardo de Pisa, matemático italiano del siglo XIII).

**La sucesión de Fibonacci** es la siguiente sucesión infinita de números naturales:

**0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377...**

La sucesión inicia con 0, y a partir de ahí cada elemento, es la suma de los dos anteriores (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8...)

También aparece en configuraciones biológicas, como por ejemplo en las ramas de los árboles, en la disposición de las hojas en el tallo, en la flora de la alcachofa y en el arreglo de un cono.

Fibonacci, en su Libro de los ábacos (Liber abacci, 1202, 1228), usa la sucesión que lleva su nombre para calcular el número de pares de conejos meses después de que una primera pareja comienza a reproducirse. El cociente de dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci tiende a la sección áurea o al número áureo si la fracción resultante es propia o impropia, respectivamente.

Lo mismo sucede con toda sucesión recurrente de orden dos, según demostraron Barr y Schooling en la revista The Field del 14 de diciembre de 1912.

- Los números de Fibonacci en Botánica ocurren con gran regularidad. La disposición de las escamas de las piñas, frutos de diferentes especies de pinos, se organiza en torno a dos espirales de escamas: una dextrógira y otra levógira.
- Se ha constatado empíricamente que en un número muy elevado de estas especies, son números consecutivos de la sucesión de Fibonacci.
- Otros ejemplos son las tortas de girasol, las cabezuelas de las margaritas, etc. Las hojas de la mayor parte de plantas de tallo alto, están colocadas alrededor del mismo pudiendo ser recorridas siguiendo una espiral “para cada especie de plantas el ángulo que forman dos hojas consecutivas, llamado ángulo de divergencia, es constante”. La cantidad de espirales de una piña (ocho y trece espirales), flores o inflorescencias. Estos números son elementos de la sucesión de Fibonacci y el cociente de dos elementos consecutivos tiende al número áureo.
- La disposición de los pétalos de las flores (el papel del número áureo en la botánica recibe el nombre de Ley de Ludwig).
- La relación entre las nervaduras de las hojas de los árboles
- La relación entre el grosor de las ramas principales y el tronco, o entre las ramas principales y las secundarias (el grosor de una equivale a  $\Phi$  tomando como unidad la rama superior).
- La distancia entre el ombligo y la planta de los pies de una persona, respecto a su altura total.
- Las distancias entre nuestro cuerpo son proporcionales entre sí, como las de la pierna al muslo, el brazo al antebrazo, etc.
- La cantidad de pétalos en las flores. Existen flores con 3, 5 y 8 pétalos y también con 13, 21, 34, 55, 89 y 144.
- La distribución de las hojas de la yuca y la disposición de las hojas de las alcachofas.
- La relación entre la distancia entre las espiras del interior espiralado de cualquier caracol o de cefalópodos como el nautilus. Hay por lo menos tres espirales logarítmicas más o menos asimilables a proporciones áureas. La primera de ellas se caracteriza por la relación constante igual al número áureo entre los radio vectores de puntos situados en dos evolutas consecutivas en una misma dirección y sentido.



Concha de nautilus en espiral logarítmica

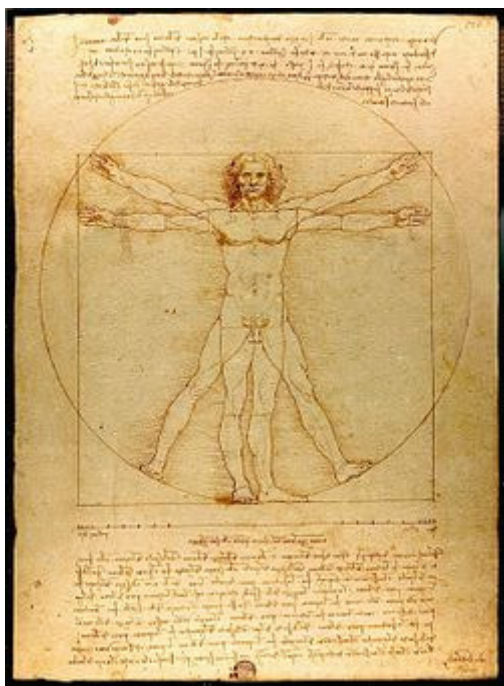
## El número áureo en la cultura

- Relaciones en la forma de la Gran Pirámide de Gizeh. La afirmación de Herodoto de que el cuadrado de la altura es igual a la superficie de una cara es posible únicamente si la semi-sección meridiana de la pirámide es proporcional

$$\left(1, \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

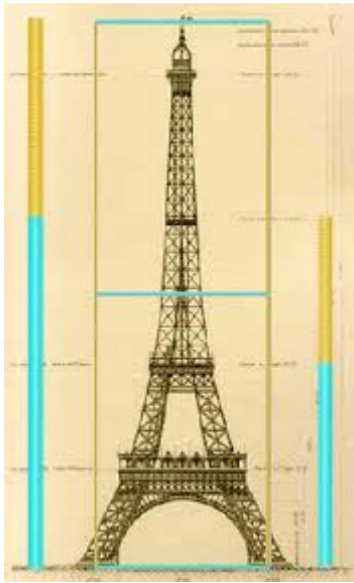
al triángulo rectángulo, donde 1 representa proporcionalmente a la mitad de la base, la raíz cuadrada del número áureo a la altura hasta el vértice (inexistente en la actualidad) y el número áureo o hipotenusa del triángulo a la apotema de la Gran Pirámide.

- La relación entre las partes, el techo y las columnas del Partenón, en Atenas (s. V a. C.).
- En el cuadro *Leda atómica*, de Salvador Dalí.
- En las estructuras y tiempos de las películas "El acorazado Potemkin" e "Iván el Terrible" de Serguéi Eisenstein.
- En los violines, la ubicación de las efes o eses (los "oídos" u orificios en la tapa) se relaciona con el número áureo.
- El número áureo aparece en las relaciones entre altura y ancho de los objetos y personas que aparecen en las obras de Miguel Ángel, Durero y Leonardo Da Vinci, entre otros.



Unas proporciones armoniosas para el cuerpo, que estudiaron antes los griegos y romanos, las plasmó en este dibujo Leonardo da Vinci. Sirvió para ilustrar el libro *La Divina Proporción* de Luca Pacioli. Resulta que el cociente entre la altura del hombre (lado del cuadrado) y la distancia del ombligo a la punta de la mano (radio de la circunferencia) es el número áureo.

- En las estructuras formales de las sonatas de Wolfgang Amadeus Mozart, en la Quinta Sinfonía de Ludwig van Beethoven, en obras de Franz Schubert y Claude Debussy (estos compositores probablemente compusieron estas relaciones de manera inconsciente, basándose en equilibrios de masas sonoras).
- El arte Póvera fue un movimiento artístico italiano de los años 1960, muchas de cuyas obras se basan en esta sucesión.
- En la cinta de Darren Aronofsky *Pi*, fe en el caos/ $\pi$ , el orden del caos, el personaje central, el matemático Max Cohen, explica la relación que hay entre los números de Fibonacci y la sección áurea, aunque denominándola incorrectamente Theta ( $\theta$ ) en vez de Phi ( $\Phi$ ).
- En la conformación de la estructura de la Torre Eiffel



Este número es irracional, aunque es algebraico y también construible mediante regla y compás, y existen numerosas aproximaciones racionales con mayor o menor error.

En el año 2008 se obtuvieron cien mil millones de cifras decimales correctos.

## Poema de Rafael Alberti

Trata de la divina proporción, el número áureo, o numero phi.

En él Alberti nos describe este número como la razón de la belleza el cual es descrito como la causa del universo, la razón de la hermosura, el origen de las formas regulares...

**A ti, maravillosa disciplina,  
media, extrema razón de la hermosura  
que claramente acata la clausura  
viva en la malla de tu ley divina.  
A ti, cárcel feliz de la retina,  
áurea sección, celeste cuadratura,  
misteriosa fontana de medida  
que el universo armónico origina.  
A ti, mar de los sueños angulares,  
flor de las cinco flores regulares,  
dodecaedro azul, arco sonoro.  
Luces por alas un compás ardiente.  
Tu canto es una esfera transparente.  
A ti, divina proporción de oro.**

*El primer motivo por el que he elegido este poema es porque cuando el profesor Esteban López lo presentó en su clase, me impresionó.*

*El otro motivo por el cual he elegido este poema es porque cuando pensamos en poesía lo primero que nos imaginamos es la descripción de los sentimientos, del ser amado y de la belleza del paisaje, pero a través “**A la divina proporción**” quiero demostrar que la belleza puede encontrarse en lugares tan insospechados como es un número irracional.*

Marina Troncoso Rodríguez  
(Alumna del Programa de Mayores Universidad de Vigo)

Curso 2012-2013

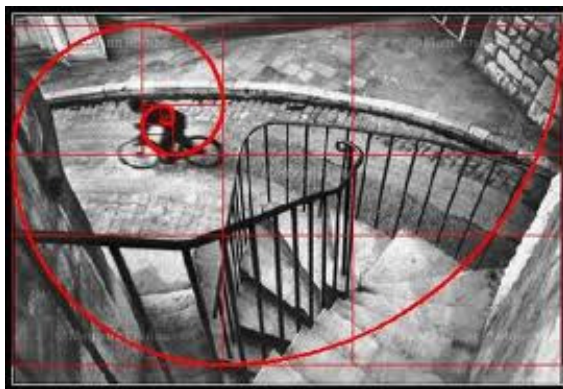
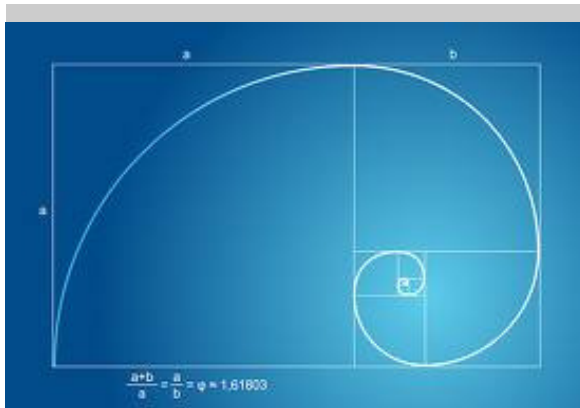
Asignatura: Ciencia y Tecnología  
Profesor: Esteban López Figueroa

Diciembre de 2012

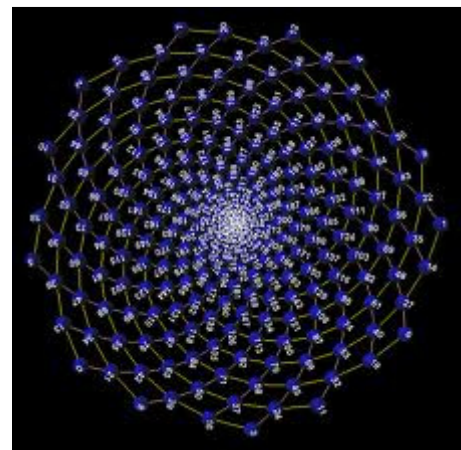
## Bibliografía

En orden cronológico:

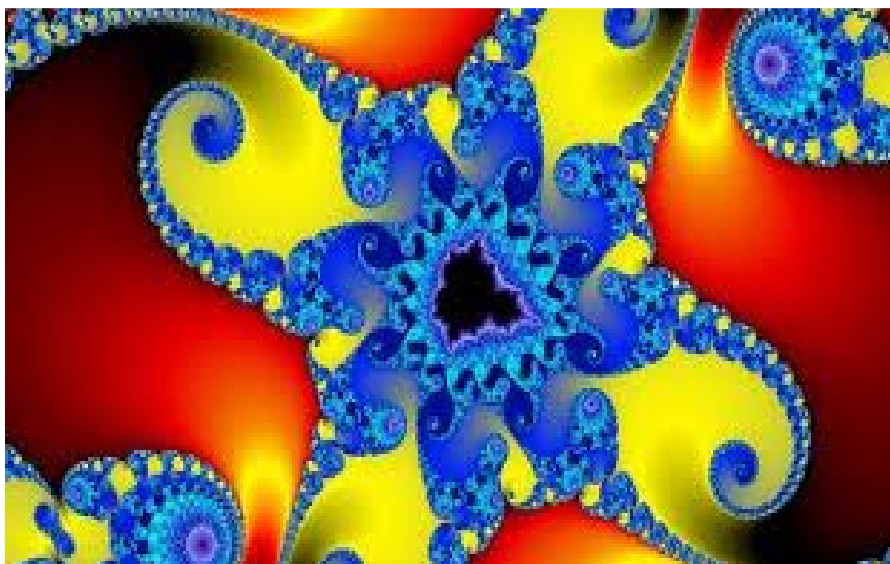
- Jarolimek (Viena, 1890). *Der Mathematischen Schlüssel zu der Pyramide des Cheops*.
- Kleppisch, K. (1921). *Die Cheops-Pyramide: Ein Denkmal Mathematischer Erkenntnis*. München: Oldenburg.
- Cook, Theodore Andrea (1979; obra original: 1914). *The Curves of Life*. Nueva York: Dover. [ISBN 0-486-23701-X](#); [ISBN 978-0-486-23701-5](#).
- Pacioli, Luca (1991). *La Divina Proporción*. Tres Cantos: Ediciones Akal, S. A.. [ISBN 978-84-7600-787-7](#).
- Ghyka, Matila (1992). *El Número de Oro*. Barcelona: Poseidón, S.L.. [ISBN 978-84-85083-11-4](#).
- Ghyka, Matila (2006). *El Número de Oro. I Los ritmos. II Los Ritos*. Madrid: Ediciones Apóstrofe, S. L.. [ISBN 978-84-455-0275-4](#).
- Corbalán, Fernando (2010). *La proporción áurea*. RBA Coleccionables S. A.. [ISBN 978-84-473-6623-1](#).



El nº phi en el arte



El nº phi en la naturaleza



Representación por ordenador